Örnek:

X_1 ve X_2 rastgele değişkenlerinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 6e^{-3x_1-2x_2}, & x_1 > 0\ ,\ x_2 > 0 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

olsun. Y= X_1 + X_2 rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu dağılım fonksiyonu tekniği ile bulunuz?

Çözüm: Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$G(y) = P\,(Y \leq y) = P\,(X_1 + X_2 \leq y)$$

$$= \int_{x_1=0}^{y} \int_{x_2=0}^{y-x_1} f(x_1,x_2) d_{x_2} d_{x_1}$$

$G(y) = 2e^{-3y} - 3e^{-2y} + 1$ ⇨ Y rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

Y = $X_1 + X_2$ rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(y) = \frac{d}{d_y} G(y)$$

$$g(y) = \begin{cases} 6e^{-2y} - 6e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek:

Bağımsız X ve Y rastgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonları sırasıyla

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2}(x-\mu_x)^2} \quad , \quad x \text{ £ Ʀ}$$

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_y^2}(y-\mu_y)^2} \quad , \quad y \text{ £ Ʀ}$$

olarak verilsin. U = X+Y rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonunu Moment üreten fonksiyon tekniği ile bulunuz?

Çözüm:

X ve Y rastgele değişkenlerinin Moment çıkaran fonksiyonları sırasıyla

$$M_X(t)= e^{t\mu_x+\frac{1}{2}t^2\sigma_x^2} \quad , \quad M_Y(t) = e^{t\mu_y+\frac{1}{2}t^2\sigma_y^2}$$

dir. U rastgele değişkeninin Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_U(t) = \mathrm{E}(e^{tU}) = E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX+tY)}\right) = E(e^{tX}) \,.\, E(e^{tY})$$

$$= e^{t(\mu_x+\mu_y)}+\frac{1}{2}t^2\left(\sigma_x^2+\sigma_y^2\right)$$

olduğundan U $\sim$ N $\left(\mu_x+\mu_y\ ,\ \sigma_x^2+\sigma_y^2\right)$ 'dir. O zaman U rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ;

$$\mu_U = \mu_x+\mu_y \quad \text{ve} \quad \sigma_u^2 = \sigma_x^2+\sigma_y^2$$

ise

$$f(u)= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma_u^2}(u-\mu_U)^2} \quad , \ \mathrm{u} \ £ \ \text{Ʀ}$$

elde edilir.

Kaynaklar

(1) Akdi, Y. (2010) Matematiksel İstatistiğe Giriş, Gazi Kitabevi, Ankara.

(2) Hogg, R. V. And Craing, A. T. (1989). Introduction to Mathematical Statistics. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(3) Mendenhall, W., Wackerly, D. D. and Scheaffer, R. (1990). Mathematical Statistics with Applications. 4th Ed., Boston: PWS-Kent Publishing Company.

(4) Hogg, R. V. And Tanis, E. A. (1993) Probability and Statistical Inference. 4th Ed., New York: Macmillan Publishing Co.

(5) Larson, H. J. (1982). Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. 3rd Ed., New York: John Wiley ve Sons.